

矩形水槽における非線型スロッシング波高の評価

(株)四国総合研究所 エネルギー技術部 小川口 深雪
(株)四国総合研究所 エネルギー技術部 野口 新二

キーワード: スロッシング
矩形水槽
非線型
固有振動数
応答曲線
背骨曲線
Miles
Duffing 方程式
補正式
粒子法
MPS 法

Key Words: sloshing
rectangular tank
non-linear
natural frequency
response curve
backbone curve
Miles
Duffing equation
correction formula
particle method
Moving Particle
Semi-implicit method

Evaluation of Nonlinear Sloshing Wave Height in Rectangular Tank

Shikoku Research Institute, Inc., Energy Engineering Department
Miyuki Ogawaguchi, Shinji Noguchi

Abstract

We have verified a non-linear theory for estimating the sloshing wave height in a rectangular tank by experiments. A rectangular tank with width L and water level H was sine-wave excited in the width direction. As a result, a traveling wave was observed when the H/L was small, and a standing wave was observed when the H/L was large, and it was confirmed that the wave behavior was different depending on the water depth. By comparing the Miles's backbone curve (the curve at the center of the response curve) with the experimental value to evaluate the wave height, it was found that the error from the experimental value was increase when H/L was small. Therefore, we proposed a correction formula and could reduce the error from the experimental value over H/L in all regions. Moreover, by applying the Duffing equation to the correction formula, we were able to calculate the response curve.

The results of applying the Moving Particle Semi-implicit (MPS) method to sloshing analysis were in good agreement with the corrected theoretical formula and experimental values, and the validity of the analysis was confirmed. From the both sides of analysis and theory, it was possible to estimate the maximum wave height with high accuracy. By improving the analysis accuracy, it is possible to study flooding without simulated experiments, and cost reduction can be expected.

1. はじめに

液体貯槽やタンクにおいて、地震時に発生するスロッシングは防災上重要な問題である。スロッシングの解析は、液面変動が微小の場合は線型理論を適用できるが、水滴の飛び散りや、溢流が生じるほどの大きな変位の場合には非線型性を考慮する必要性が出てくる。そのため、周期的に加振した矩形水槽中に生じるスロッシング波高推定において、非線形性を考慮した理論を実験によって検証した。また、スロッシング現象の数値解析として粒子法を採用し、解析結果を角振動数応答理論および実験結果と比較することによって、数値解析の妥当性を確認した。

2. 非線形スロッシングの理論解

矩形水槽中の液体変動が小さく理想的な場合、液体の1次固有角振動数(2次元) ω_1 は(1)式で求められる。

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g\pi}{L} \tanh \frac{H}{L}} \pi \quad \dots (1)$$

ここで、 L は矩形水槽の幅、 H は液体の高さ、 g は重力加速度である。(1)式より固有角振動数 ω_1 は、液体の種類に関係なく、 H と L の比 H/L によって決まることがわかる。

矩形水槽に周期的な外力(角振動数 ω) を加えた場合、波高が最大となる角振動数は固有角振動数 ω_1 とは異なることが知られている。図1に示すように、角振動数比と波高の関係を示す応答曲線と背骨曲線(応答曲線の中心部の曲線)をプロットすると、共振ピークは H/L の値によって ω_1 より大きい値(赤線)や小さい値(青線)になる。

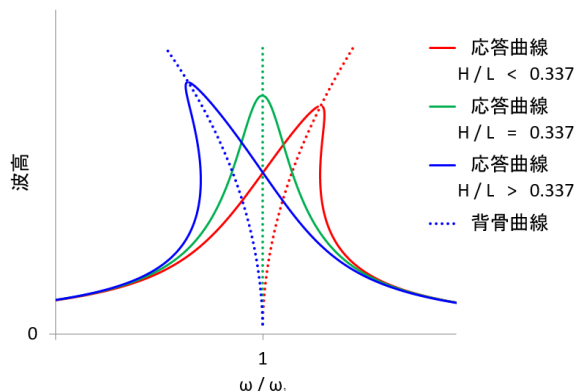


図1 応答曲線と背骨曲線

非線型スロッシングにおける背骨曲線は、Miles によって(2)式で与えられており¹⁾、スロッシングの波高は固有角振動数 ω_1 と外力の角振動数 ω の比によって変化する。ここで、 A は波の振幅である。

$$\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 = 1 + \frac{1}{32} \left(\frac{\pi A}{L}\right)^2 (9T^{-4} - 12T^{-2} - 3 - 2T^2) \\ T = \tanh(H/L)\pi \quad \dots (2)$$

3. 実験方法および結果

3.1 実験方法

幅 $L = 0.30\text{m}$ の水の入った矩形水槽を加振台に載せ、幅方向へ水平加振する(図2)。加振する大きさは $x(t) = 0.015 \cdot \sin \omega t$ とした。ここで、 x は幅方向の移動量、 t は時刻である。

加振振動数 ($f = \omega/2\pi$) は、 $0.7\text{Hz} \sim 2.0\text{Hz}$ まで 0.1Hz 刻みで変化させ、その応答を観察した。ビデオカメラで撮影した画像から、振動数ごとに壁面における液面変位の最大値 $2A$ を計測した(図3)。

スロッシングは水深によって挙動が異なることが知られているため、実験では表1のように水深 H を $0.03 \sim 0.18\text{m}$ まで変化させた7ケースを実施した。

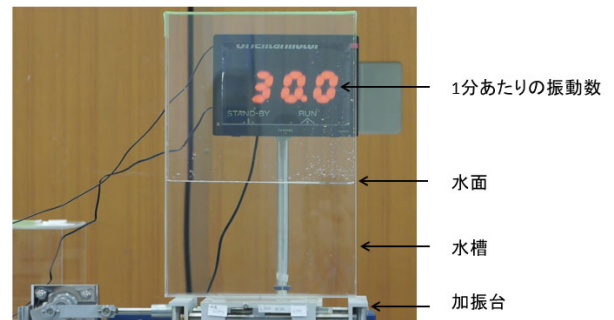


図2 実験装置

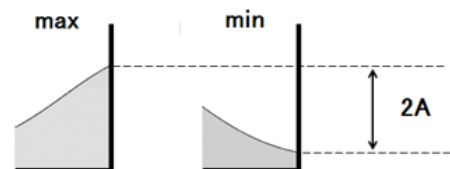


図3 液面変位の最大値

表 1 実験条件

case	H(m)	H/L	ω_1 (rad/s)
1	0.03	0.1	5.59
2	0.06	0.2	7.56
3	0.09	0.3	8.70
4	0.10	0.34	8.95
5	0.12	0.4	9.37
6	0.15	0.5	9.70
7	0.18	0.6	9.90

3.2 実験結果

波の様子を図 4 に示す。水深が浅い場合 ($H/L=0.1$) では津波のような進行波、深い場合 ($H/L=0.6$) では幅中央で節となり壁面で腹となる定常波が観察された。上方向に運動する波が尖り、下方向に運動する波は平坦になるという、非線形の特徴が出ていることがわかる。水深によって波の挙動が異なることが確認された。



$H/L=0.1$ 進行波



$H/L=0.6$ 定常波

図 4 進行波と定常波の観察

次に、液面変位の最大値を幅 L で除した無次元値と角振動数比を整理し、Miles の背骨曲線と比較した結果を図 5 示す。

実験における波高のピークは、 $H/L=0.34$ を境に $\omega/\omega_1 = 1$ の右側から左側に変化している。また、 H/L が小さい場合は波が小さく、 $H/L=0.34$ において波が最大となる。水平加振した矩形水槽の最大波高は、 H/L の値（つまり中の水の量）と外力の角振動数に拠ることがわかる。

Miles の式(2)は、 H/L が小さい場合 ($H/L=0.1$ 、 0.2) には、実験と大きくずれている。しかし、 H/L が大きくなると、実験との差は小さくなっていく。

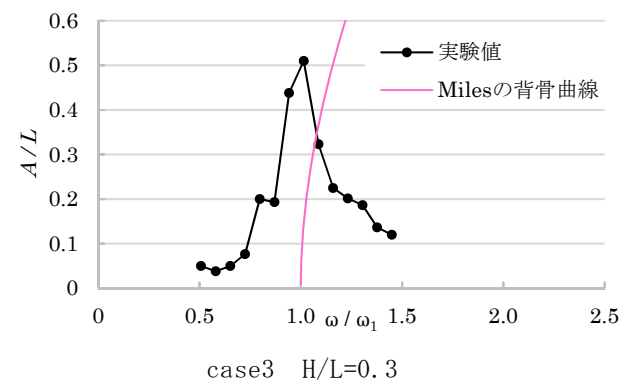
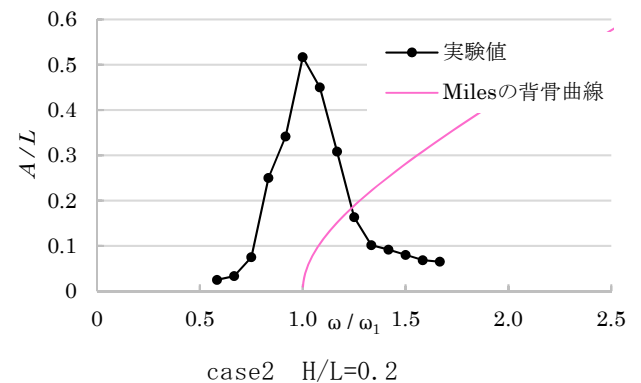
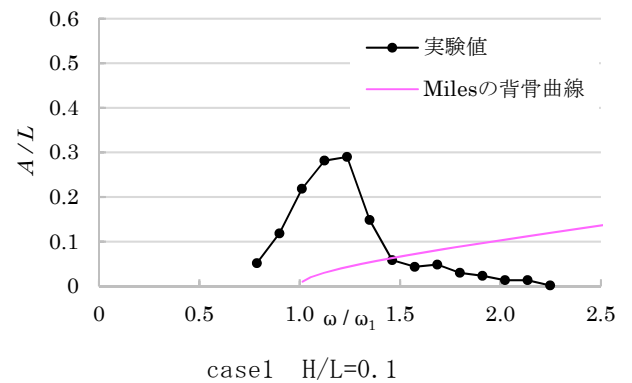


図 5 実験結果および背骨曲線 (case1~3)

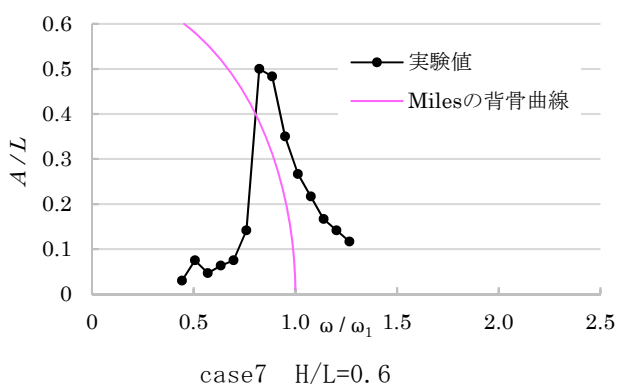
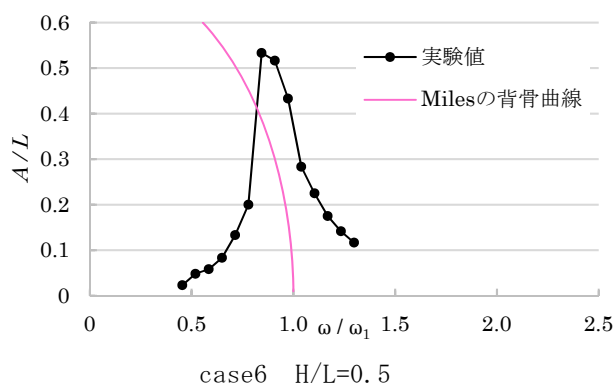
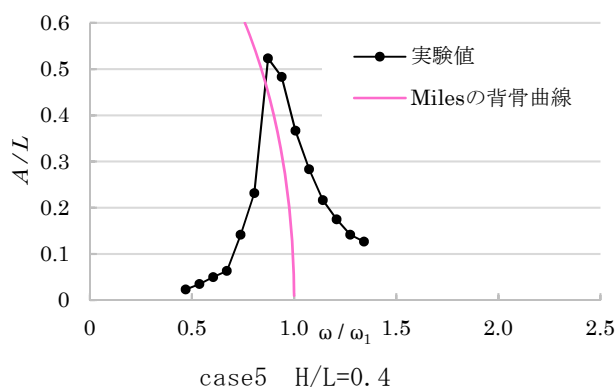
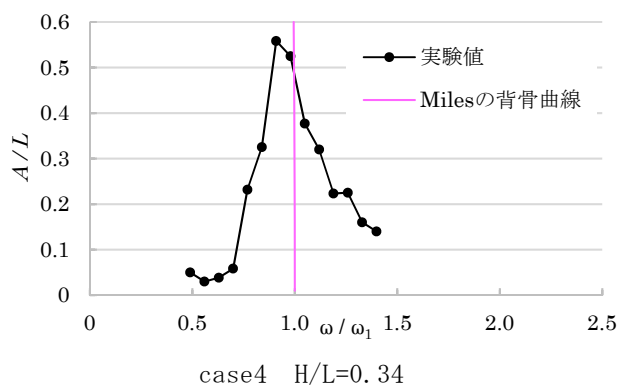
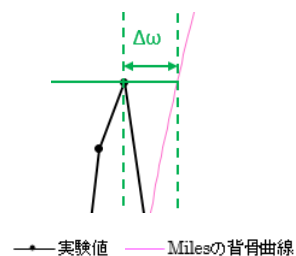


図5 実験結果および背骨曲線 (case4~7)

4. Miles の背骨曲線の補正

4.1 Miles の式と誤差

Miles の背骨曲線と実験値の比較を数値的に行った。実験値における最大振幅となる ω/ω_1 と、Miles の背骨曲線から求めた ω/ω_1 との差を図6のように誤差 $\Delta\omega$ とした。


 図6 誤差 $\Delta\omega$

H/L と $\Delta\omega$ の関係を求め、図7に示す。 H/L が小さい場合は誤差が加速的に大きくなるのがわかる。

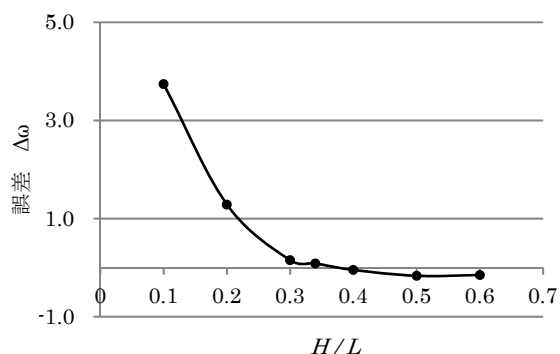


図7 実験値と Miles の背骨曲線との誤差

4.2 Miles の式の補正

Miles の背骨曲線は H/L が大きい場合は実験値とよく合うが、 H/L が小さい場合、誤差が大きい。そこで、 H/L の値によらず実験値のピークに背骨曲線が接近するような以下の補正式を考えた²⁾。

$$\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 = 1 + \frac{1}{32} \left(\frac{\pi A}{L}\right)^2 (9T^{-4} - 12T^{-2} - 3 - 2T^2) \times \alpha_1 \left(\frac{H}{L}\right)^{\alpha_2} \quad \dots (3)$$

実験値と補正式との誤差が最小になるように α_1 、 α_2 を決定する。図8に示すように、 $\alpha_2 = 1, 2, 3$ と変化させると、 $\alpha_2 = 2$ のとき誤差を最小化できることがわかった。その後、誤差がすべての H/L にわたって最小となる α_1 を求め、(4)式のように定数を決定した。これにより、3以上あった誤差を約0.1以下に低減できた。

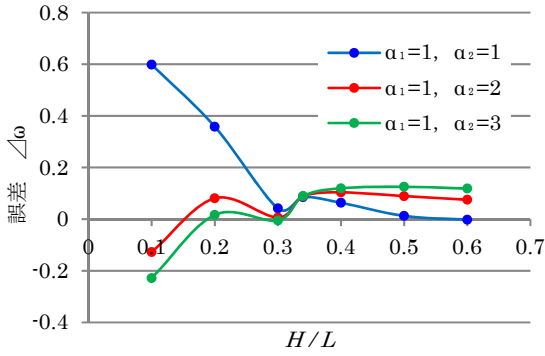


図8 補正式による実験値と背骨曲線との誤差の低減

$$\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 = 1 + \frac{1}{32} \left(\frac{\pi A}{L}\right)^2 (9T^{-4} - 12T^{-2} - 3 - 2T^2) \times C$$

$$C = 1.7 \times \left(\frac{H}{L}\right)^2 \quad \dots (4)$$

また、非線型作用を考慮するために、1自由度の非線形ばね復元力を導入した Duffing 方程式を解くことで角振動数比 ω/ω_1 と振幅の関係式³⁾を(5)式のように表すことができる。ここで、 β はばねの特性を表したものである。

$$\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 = 1 + \frac{3}{4} \beta A^2 - 2\zeta^2$$

$$\pm \sqrt{\left(1 + \frac{3}{4} \beta A^2 - 2\zeta^2\right)^2 - \left\{\left(1 + \frac{3}{4} \beta A^2\right)^2 - \frac{1}{A^2}\right\}}$$

$$\dots (5)$$

この式を(4)と比較することで、 β と H/L の関係を導くことができる。

$$\beta = \frac{1}{24} \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 (9T^{-4} - 12T^{-2} - 3 - 2T^2) \times C$$

$$T = \tanh(H/L)\pi \quad \dots (6)$$

ここで、 ζ は減衰比である。本稿においては、加振停止後に液面が自由振動する波形から対数減衰率をもとめ、 $\zeta = 0.042$ とした。

スロッシングにおける非線型性は、この β に含まれている。 $\beta = 0$ となるのは、 $H/L \cong 0.34$ のときであり、これが線型応答に対応する。 $\beta > 0$ の

場合、変位とともにばね定数が大きくなるハードスプリング特性を示し、 $\beta < 0$ の場合、その逆のソフトスプリング特性を示す。水位が $H/L \cong 0.34$ より大きい小さいかによって背骨曲線の向きが変わり、スロッシングの挙動が変化することになる。

次に、補正後の背骨曲線と応答曲線を実験値と比較したものを図9、10に示す。 H/L によらず実験値と補正後の背骨曲線および応答特性の傾向がよく合っていることがわかる。これにより、スロッシングによる最大波高を計算で予想することができた。

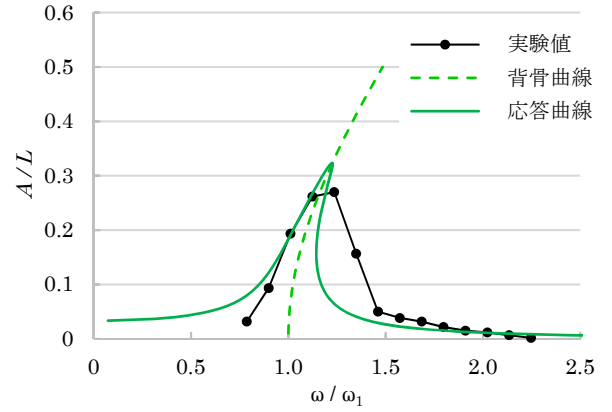


図9 $H/L=0.1$ の場合の応答特性

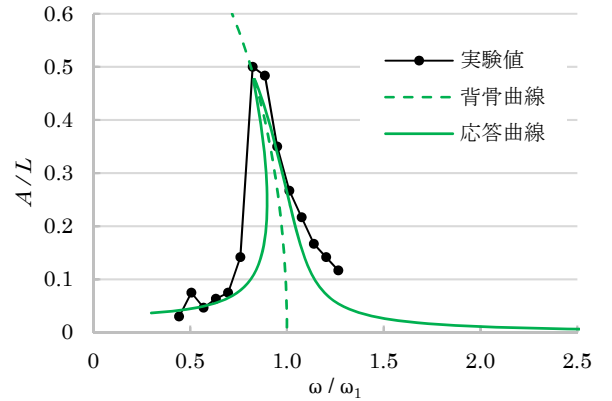


図10 $H/L=0.6$ の場合の応答特性

5. 粒子法による解析

5.1 粒子法とは⁴⁾

従来の流体解析手法（格子法）は、圧力や流速などの物理量を計算するために、メッシュと呼ばれる計算格子を用いる。メッシュは初期状態において流体が存在する領域だけでなく、流体が流動していく可能性もある領域も含めて、あらかじめ

設定しておく必要がある。流体は1つのメッシュから隣接するメッシュへと流動していき、このときメッシュごとに質量や運動量などの流入量、流出量が計算される。

格子法は流体の流れや飛散を予測して事前に解析領域を設定する必要があり、複雑な形状の解析にはメッシュを細かく設定する必要があること、およびメッシュの大変形を伴う解析ではメッシュが潰れ、計算が異常終了する可能性があるなどの理由から、水滴の飛び散りのような解析をすることが難しい。

一方、流体そのものを粒子としてモデル化する粒子法は、格子法では困難とされていた水滴の飛び散りの解析が可能である。

5.2 粒子法による解析⁵⁾

実験で使用した矩形水槽を2次元でモデル化し、粒子法による解析を行った。計算開始直後の衝撃圧の影響を避けるため、10秒後の静水圧分布や自由表面形状を初期条件として計算を行った。実験結果と同様に、水深が浅い場合は進行波となり、深い場合は定常波となる特性も解析でよく再現できている(図11)。

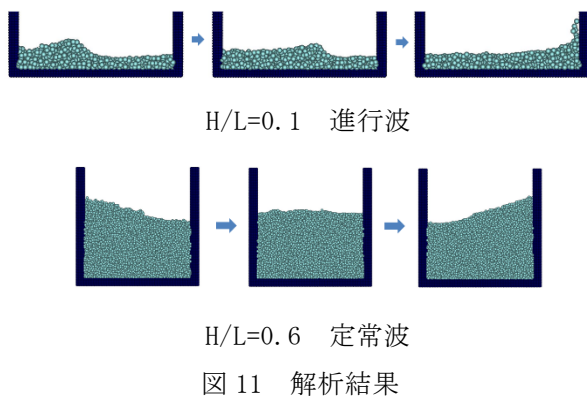


図12、図13に補正後の背骨曲線と応答曲線、実験値および解析値を比較して示す。波高値は実験値と比較的一致した。また、共振する角振動数が固有角振動数より大きくなるハードスプリング(H/L=0.1)、固有角振動数より小さくなるソフトスプリング(H/L=0.6)の特性がよく表わされている。

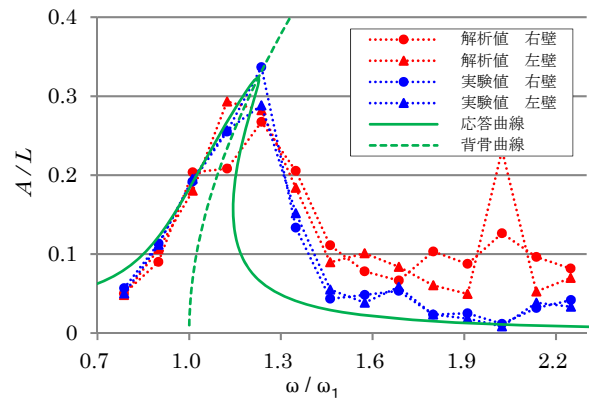


図12 角振動数と振幅の関係 (H/L=0.1)

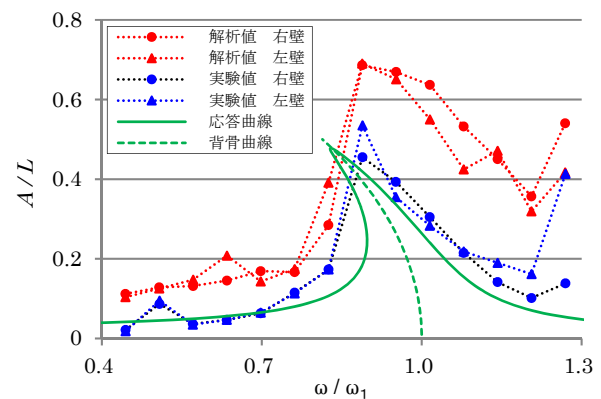


図13 角振動数と振幅の関係 (H/L=0.6)

6. まとめ

非線型スロッシングの角振動数応答に関して、実験値とMilesの式との比較を行った。その結果、Milesの式ではH/Lが小さい場合、実験値との誤差が大きくなることがわかった。そこで、Milesの式を補正した式を適用することで、実験値との誤差を小さくすることができた。また、Duffing方程式をその補正式に適用することで、応答曲線を計算で求めることができた。

粒子法を矩形水槽における非線型スロッシング解析に適用した結果、理論式および実験値と比較的良好一致し、解析の妥当性が確認できた。解析、理論の両面から、高い精度で最大波高を推定できる見込みが得られた。さらに解析精度を高めていけば、今後は模擬実験を実施することなく、溢水対策の評価が可能となり、コスト低減が期待できる。

【謝辞】

本研究は、四国電力㈱殿より委託を受け実施したもので、ご協力いただいた関係各位に深く感謝いたします。

【参考文献】

- 1) Miles, J.W. : Nonlinear Surface Waves in Closed Basins, J.of Fluid Mechanics, vol.75, part 3, pp419-448, 1976
- 2) 小川口深雪, 岩田正純 : 矩形水槽における非線形スロッシングの理論式の背骨曲線の補正, 平成 30 年度土木学会関西支部年次学術講演会
- 3) 小松敬治 : スロッシング, 森北出版, 2015
- 4) 越塚誠一, 柴田和也, 室戸浩平 : 粒子法入門, 丸善, 2014
- 5) 粒子法コードユーザーグループ